SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Naiara Colliselli
Tânia Marise Specht
Ilário Ruscheinsky

RESUMO: Trabalhando-se com superfícies quádricas no plano de coordenadas, pode-se determinar inúmeras formações de superfícies exploráveis aos olhos da matemática. Explorando conceitos matemáticos, aliados ao uso do software Geogebra, pode-se demonstrar superfícies resultantes do estudo fundamental na Geometria Analítica. O seguinte artigo consiste na exploração de conceitos Analíticos por meio de sua demonstração no espaço de coordenadas cartesianas, demonstrando sua disposição pode-se denotar sua similaridade com objetos presentes em nosso cotidiano. Os presentes objetos formam-se sobre a rotação em volta dos eixos cartesianos, determinando estudos possíveis para inúmeras áreas do conhecimento. Além disso, demonstra a aplicação de programas e tecnologias possíveis para a sala de aula, no ensino aprendizagem da Matemática.
Palavras-chave: coordenadas; superfícies; quádricas.

ABSTRACT: Working with quadric surfaces on the coordinate plane , one can determine many formations exploitable surfaces of the mathematical eyes. Exploring mathematical concepts , combined with the use of the Geogebra software , it can be shown resulting surfaces of the pivotal study in Analytical Geometry . The following article is the exploration of Analytical concepts through its demonstration in the space of Cartesian coordinates , demonstrating their disposal can denote its similarity to present objects in our daily lives . The present objects are formed on the rotation around the Cartesian axes , determining possible studies for numerous areas of knowledge. Moreover, it shows the application of possible programs and technologies for the classroom, the teaching and learning of mathematics.
Keywords: coordinates; surfaces ; quadrics .

1 INTRODUÇÃO

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz + d = 0}$$

A equação acima descrita é entendida como a equação geral de segundo grau nas três variáveis *x*, *y* e *z*, entende-se, portanto que todos os pontos identificados nesse espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas *x*, *y* e *z* satisfazem a equação, gerando uma superfície quádrica. Assim, a equação de segundo grau em *xyz* determina um gráfico onde suas projeções determinam uma superfície quádrica. Além disso, as mesmas são denominadas também de conicóides.

Para a efetivação da equação é preciso que pelo menos um dos coeficientes [*A*, *B*, *(...)* *F*] seja não nulo pois, se todos os coeficientes forem nulos, a equação não será de segundo grau (representando um plano, ou até um ponto no espaço). Eliminando também, os casos triviais do tipo $x^2 - x = 0$, equivalente a $x(x - 1) = 0$ e portanto às duas equações $x = 0$ e $x = 1$, que representam dois planos paralelos ao plano *y//z*.

A partir das superfícies quádricas não-degeneradas, sendo nem todos os seis coeficientes (*A,B,C,D,E* e *F*) não nulos, além dos quatro restantes (*a,b,c* e *d*), calcula-se então os invariantes da equação[1]. Esses permitem a classificação das equações de segundo grau em três variáveis.

2 A HISTÓRIA DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

No desenvolver da Álgebra na Europa, através da Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, manuscrito esse descrito por Pierre de Fermat em 1629, que é reconhecido como o marco inicial da Geometria Análitica. Foi com a ajuda de Pierre que os estudos da Geometria Analitica facilitaram o desenvolver da Geometria Plana e Espacial, sendo considerado uma “estrada real”, causando assim, na perda de inúmeras obras de Euclides, pelo fato de ele ter afirmado ao rei Ptolomeu: “não há “estrada real” para aprender a Geometria”. Eis, que referencias que Euclides tenha escrito um tratado sobre elipsoides, paraboloides, hiperboloides, esfera, cilindro e cone. Pois, foi Euclides que fundou a Escola de Matemática na Biblioteca de Alexandria, onde que alcançou 700.000 papiros e pergaminhos escritos.

Arquimedes, um dos discípulos de Euclides, apresentou estudos aprofundados referente aos sólidos de revolução. Como é o caso dos:

- Conóides e Esferóides: descrição dos sólidos gerados pelas elipses, parábolas e hipérboles em torno dos seus eixos. As demais descritas por Arquimedes geram uma área de elipse.
- Esfera e Cilindro: contém demonstrações sobre áreas e volumes dos referidos sólidos, estudos de áreas e volumes da esfera (calotas e segmentos) e do cilindro.

Apolônio de Perga é outro matemático que desenvolveu estudos perante as quádricas, foi o primeiro a mostrar que a elipse, a parábola e a hipérbole podem ser obtidas variando a inclinação do plano de seção sobre um cone de duas folhas.

Foi Euler que deu uma das mais significativas contribuições a geometria no E^3, no seu livro Introdução à Análise Infinita, apresenta em esse livro as superfícies de segundo grau no E^3, também há representações de cones, paraboloides, elipsoides e dos hiperboloides, feitos no sistema cartesiano E^3. Durante o século XVIII, as superfícies tem uma notável participação no

[1] São números dados em termos de determinantes e traços de certas matrizes formadas com estes dez coeficientes.

surgimento da Geometria Diferencial, com inter aplicações do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica.

3 TIPOS DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Entende-se que uma equação geral do segundo grau costuma possuir três variáveis (x,y,z), sendo que um dos coeficientes da equação (a,b,c,d,e ou f) deve ser diferente de zero, sendo assim obtém-se uma superfície quádrica. No momento em que a quádrica for cortada em planos coordenados ou em planos paralelos a eles, a curva que se formará é reconhecida como a cônica.

3.1 SUPERFICIE ESFÉRICA

É uma superfície esférica S que possui um centro C e o raio r > 0, sendo considerado o local geométrico dos pontos de espaço que mantém uma distância r de C. Sendo assim descrita:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

3.2 SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Quando há uma curva C e uma reta r e a superfície é a união das retas paralelas a r e que passam por C. E quando a curva C for uma quadrática plana, então pode-se dizer que a superfície será uma quádrica no espaço.

3.3 SUPERFÍCIE CÔNICA

No momento em que há a formação de uma curva C em um ponto V, que não pertence a C, sendo assim S a união das retas VQ, na qual Q percorre C. Assim como na superfície cilíndrica, no instante em que a curva C for uma quádrica plana, então a sua superfície será uma quádrica no espaço.

3.4 SUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO

Havendo uma reta r e uma curva C sendo a superfície S uma união das circunferências com centro em r e que acabam tangenciado em C, sendo r o eixo de rotação de S. Na maioria dos casos, quando a curva C é uma quádrica disposta de maneira plana, tendo uma superfície de grau maior que 2. E somete será quádrica quando C, além de ser quádrica, possui r como eixo de simetria.

4 SUPERFÍCIES CENTRADAS E NÃO CENTRADAS

É possível por meio das alterações de coordenadas na rotação e/ou translação, sendo a equação geral, disposta antes, transformada em uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$

A partir dessa forma são denominadas as formas canônicas ou os padrões de superfícies quádricas centradas. Com as combinações de sinais nesta equação, conclui-se que existem apenas três possibilidades na formação de superfícies, conforme o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação. Se os coeficientes estiverem todos negativos, não existirá lugar geométrico.

4.1 ELIPSÓIDE

A Elipsóide é uma superfície regular determinada pela rotação de uma elipse em volta de seu eixo menor formando uma Superfície Elipsoidal. A mesma é determinada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traçando nos planos as coordenadas geram elipses, bem como os traços em planos paralelos aos planos coordenados, interceptando a superfície em mais de um ponto. Mas para tal é necessária a equivalência de $a>0,b>0$ e $c>0$.

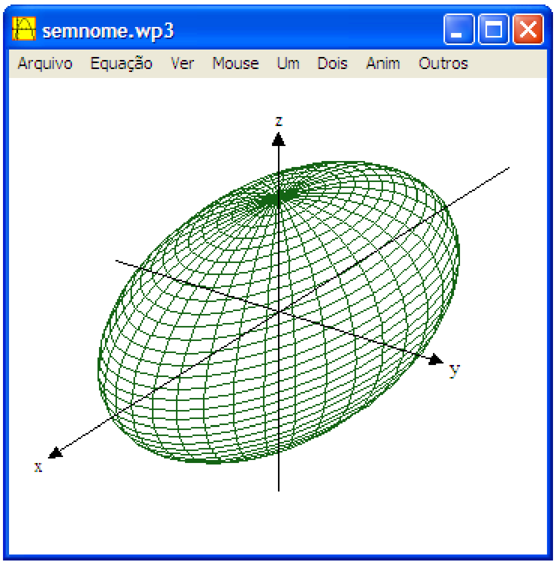

Figura 1 - Imagem de Elipsóide feita com o programa Winplot

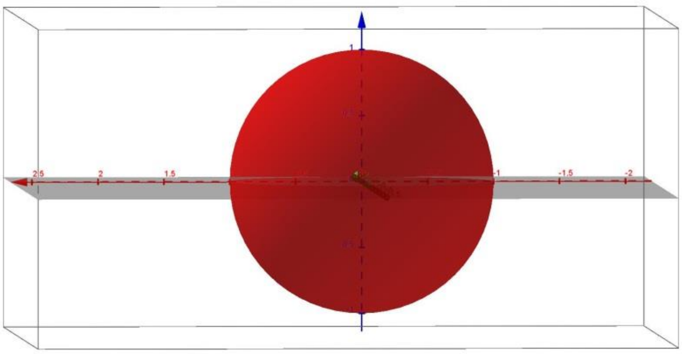

Figura 2 - Elipsoide feita no geogebra

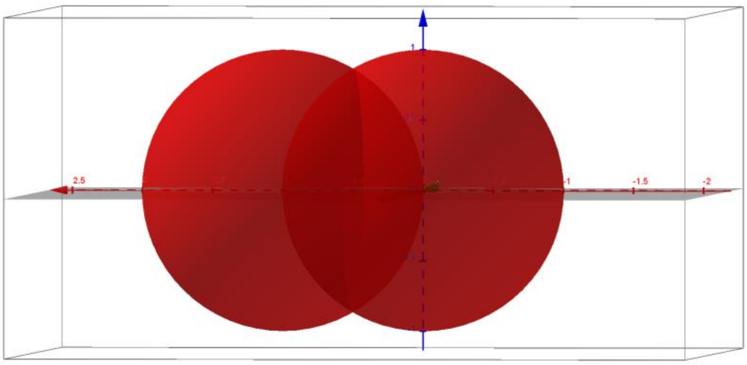

Figura 3 - Elipsoide deslocada

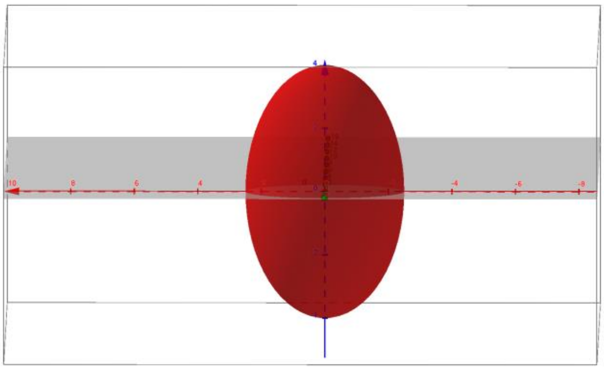

Figura 4 - Elipsoide

4.2 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

No hiperboloide de uma folha, dois coeficientes dos termos do primeiro membro são positivos e um é negativo, determinando assim a hiperboloide de uma folha. Seguem as equações que as determinam, de acordo com os eixos coordenados da mesma:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

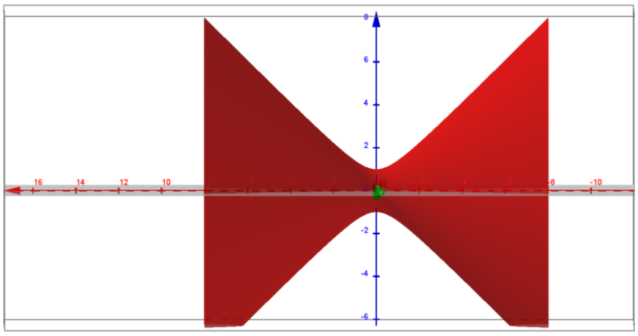

Figura 5 - Hiperboloide de uma folha no eixo x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

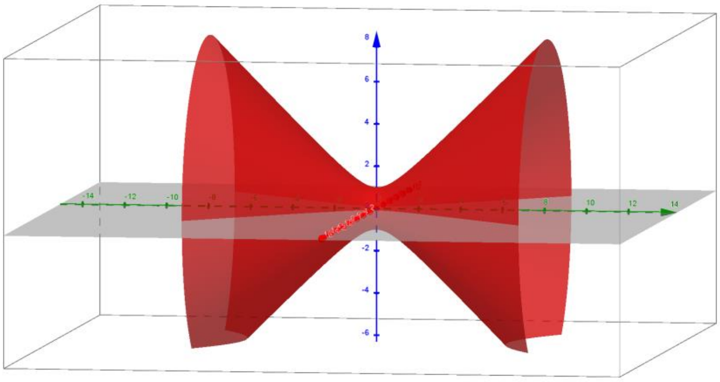

Figura 6 - Hiperboloide de uma folha no eixo y

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

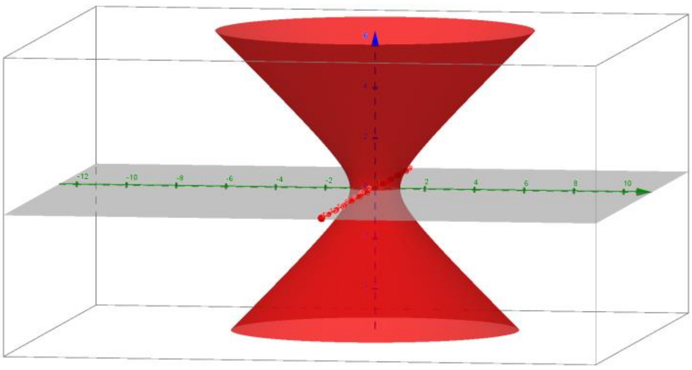

Figura 7 - Hiperboloide de uma folha no eixo z

De acordo com as imagens define-se assim a equação da hiperboloide de uma folha em:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Os hiperboloides são superfícies quadricas que se caracterizam por apresentar três tipos de seções planas, sendo as mesma hipérboles, elipses e retas. O hiperbolide de uma folha é simétrico relativamente com cada um dos planos coordenados e com a origem. Sua intersecção com o plano paralelo XOY é uma elipse, e sua intersecção com o plano YOZ ou XOZ é uma hipérbole. Os traços nos planos perpendiculares a dois dos eixos coordenados são hipérboles e nos planos perpendiculares ao outro eixo coordenado são elipses ou círculos.

Um hiperboloide de uma folha pode-se obter girando uma hipérbole ao redor de seu eixo transversal. Além disso, é uma superfície com regras duplas. Suas utilizações são amplas na construção civil.

4.3 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS

Um hiperboloide de duas folhas, com eixos AB é contraído como em conjunto com os pontos P tais que AP-BP é constante, originando-se AP da distância entre A e P, além disso A e B são titulados como focos do hiperboloide.

Um hiperboloide de duas folhas consegue ser adquirido por meio da rotação de uma hipérbole ao redor do seu eixo focal. A partir disso, definida ela equação geral de ordem:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

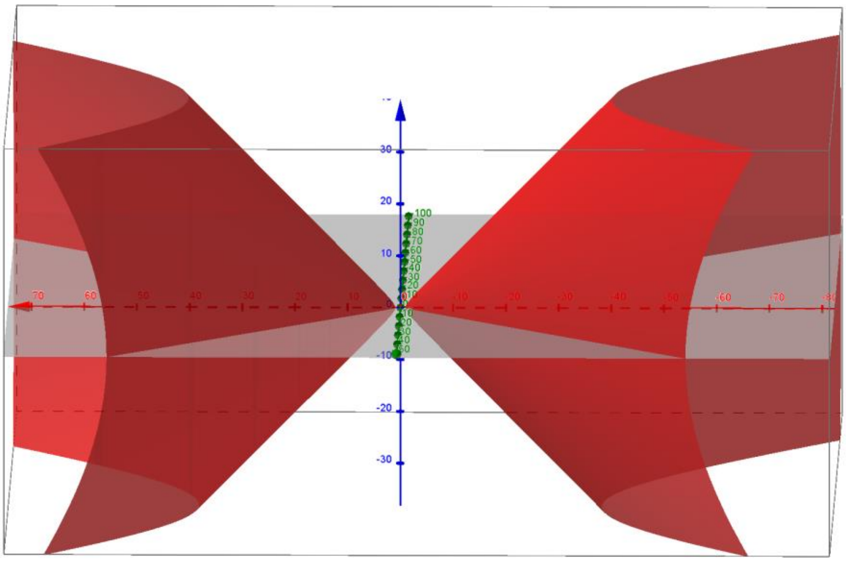

Figura 8 - Hiperboloide de duas folhas no eixo x

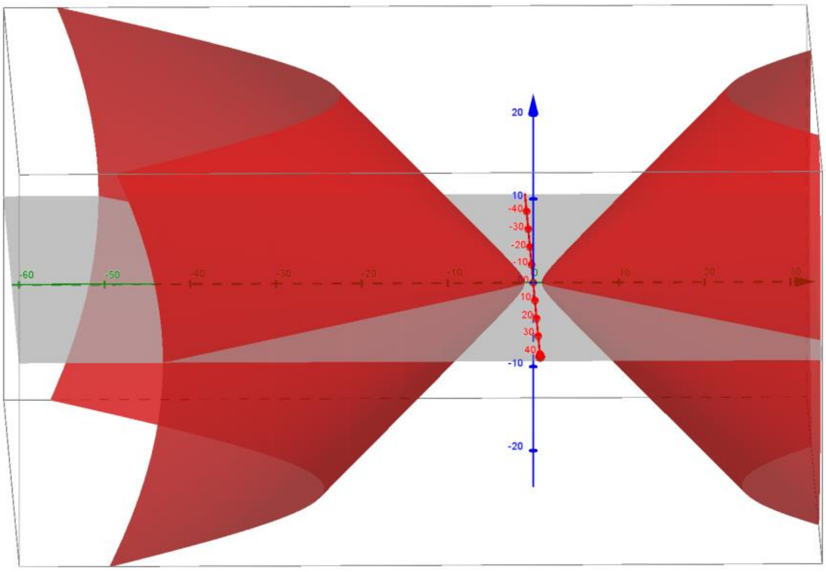

Figura 9 - Hiperboloide de duas folhas no eixo y

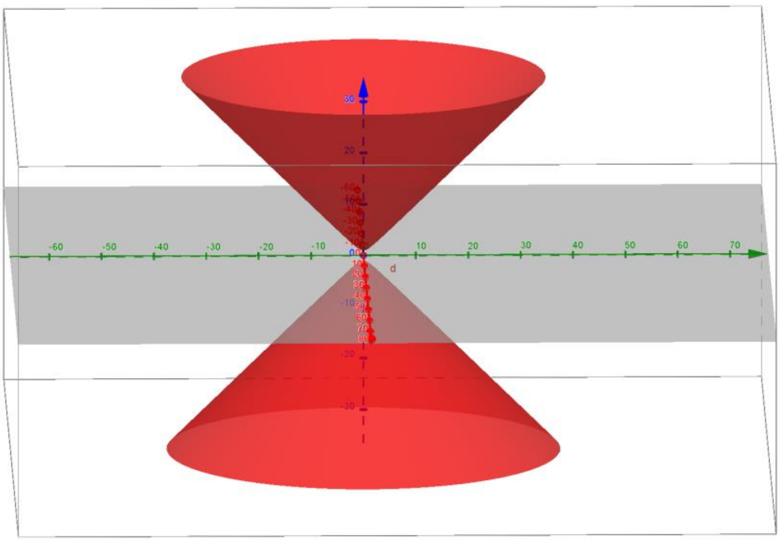

Figura 10 - Hiperbolide de duas folhas no eixo z

4.4 PARABOLOIDE

É uma superficie quádrica, que pode ser dividida em duas partes: Parabolóide Elíptica tem molde como copo de forma oval e pode possuir ponto máximo ou mínimo, em um sistema de coordenadas: x,y,x.

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Na qual a e b são constantes que determinam o grau da curva nos planos x-z e y-z, e é uma paraboloide com abertura para cima. Parabolóide Hiperbólico: é uma superfície em forma de sela, e representado pela equação:

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Onde que c > 0, na qual possui abertura para baixo ao longo do eixo x e ao longo do eixo y.

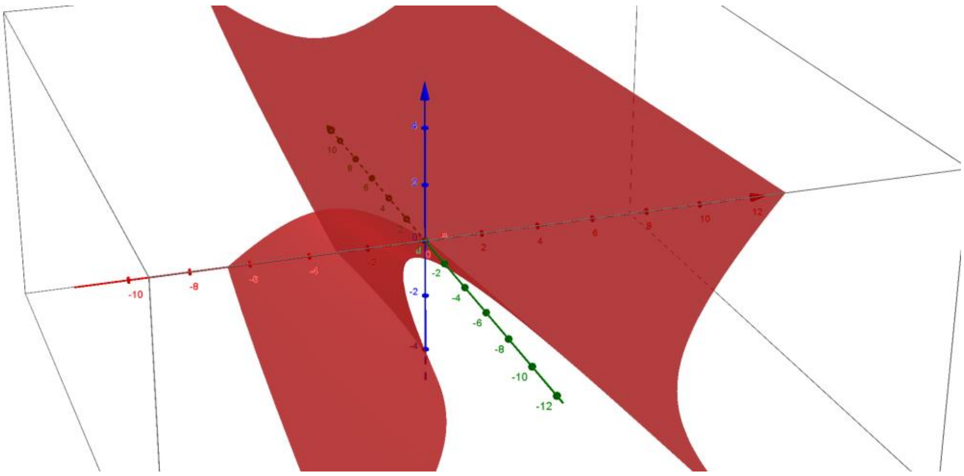

Figura 11 - Paraboloide hiperbolide no eixo x

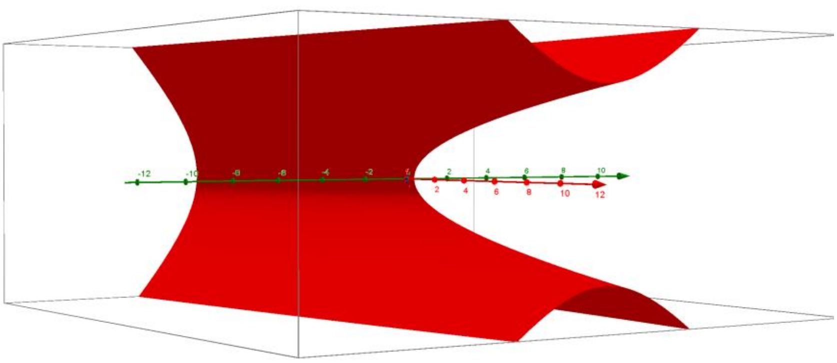

Figura 12 - Parabolide hiperbolide no eixo y

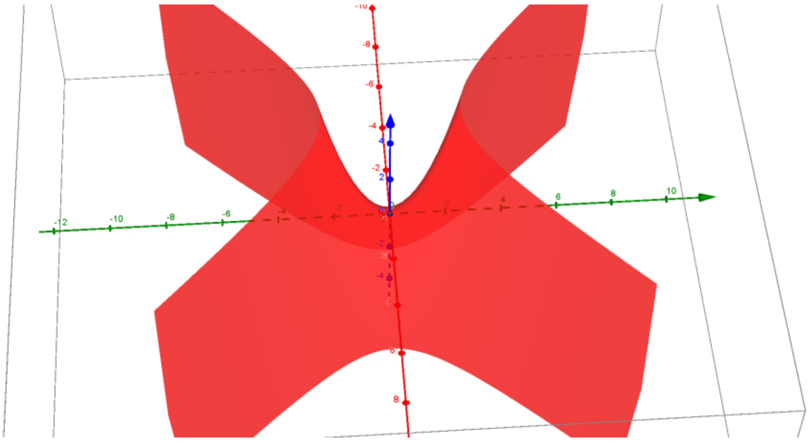

Figura 13 - Paraboloide hiperboloide no eixo z

4.5 SUPERFICIE CILINDRICA

Uma superfície cilíndrica, ou simplesmente cilindro é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada diretriz, paralelamente a uma reta, denominada geratriz. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contem a curva diretriz o cilindro é denominado cilindro reto. Se o vetor diretor da reta g, então o ponto P (x; y; z) est· sobre a superfície S se, e somente se, a reta que passa por P, paralela ao vetor v intercepta a curva diretriz, os cilindros quádricos são o lugar tridimensional das equações de segundo grau com duas variáveis, todos os valores atribuídos satisfazem a função.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

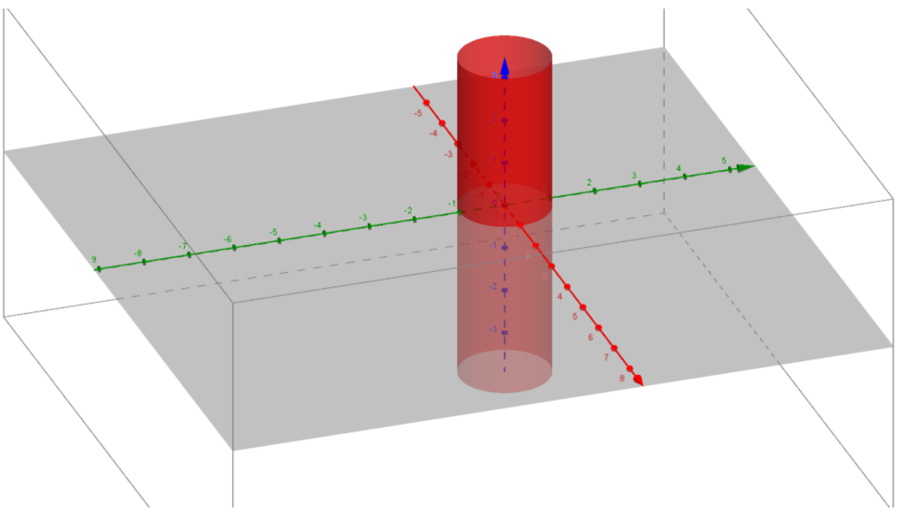

Figura 14 - Superfície cilíndrica

CONSIDERAÇÕES

Por meio da exploração de conceitos da Geometria Analítica, foi possível através do software Geogebra, demonstrar a disposição de superfícies quádricas no espaço tridimensional. O estudo permitiu a aproximação da teoria para com a aplicação visual de como são encontradas as formas no espaço das coordenadas cartesianas.

Denotada como um estudo antigo, as superfícies quádricas são conteúdos práticos de inúmeras profissões, como é o caso de engenheiros e arquitetos. Sua exploração em sala de aula, feita basicamente com estudos teóricos deveria voltar-se para estudos complementares para a visualização da disposição de cada superfície estudada no contexto espacial. Garantindo dessa forma uma aproximação visual dos conteúdos programáticos vistos em sala de aula, com objetos presentes em nosso meio visual. Além disso, pode-se destacar a importância do estudo voltado a Matemática em sala de aula, com possibilidades de exploração prática das mais diversas formas.

Assim, pode-se afirmar que a Matemática surgira da necessidade humana, evoluindo para estudos abstratos apenas a nossos olhos, pois cada conteúdo e situação há uma razão matemática por existir. Garantindo dessa maneira, a aproximação de conteúdos abstratos a nossos olhos com inúmeras situações cotidianas, afinal, tudo isso surgira para explicar fenômenos práticos.

REFERÊNCIAS

GEOMETRIA ANALÍTICA. **Superfícies Quádricas.** Disponível em: <http://matematica-ga.blogspot.com.br/2006/10/superfcies-qudricas.html>. Acesso em: dezembro 2015.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Álgebra Linear Com Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC,2013.

LAY, David C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1999.

QUÁDRICA. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Qu%C3%A1drica>Acesso em: dezembro de 2015.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

VENTURI, J.J. **Cônicas e Quádricas.** Disponível em: <http://geometriaa.dominiotemporario.com/livros/cq.pdf> Acesso em: dezembro de 2015.